MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1996
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD,

Banque de notes pour le concours EIVP

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES COMMUNE

Temps accordé : 4 heures

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants

(4 pages)

2

PREMIER PROBLEME

Soit $\mathcal{R}_0=(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{R}_\theta=(0;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ un autre repère orthonormé direct défini par $\vec{u}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$; $\vec{v}=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$ où θ est un réel appartenant à $]-\pi,\pi]$.
Soit (a, R) un couple de réels strictement positifs.
Soit $\Sigma_{a,R}$ la surface définie par l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM}=\vec{F}(\theta,\varphi)=(a+R\cos\varphi)\vec{u}+R\sin\varphi\,\vec{k}$$ où θ et φ décrivent $]-\pi,\pi]$.

PREMIERE PARTIE

I-1 Montrer que $\Sigma_{a,R}$ est une surface de révolution d'axe $(O,\vec{k})$ dont les méridiennes sont constituées de cercles. Préciser le rayon de ces cercles et l'ensemble de leurs centres.

I- 2 Discuter suivant les valeurs relatives de a et R l'existence d'un plan tangent en un point de $\Sigma_{a,R}$. Interpréter le résultat sur des figures représentant les méridiennes du plan $(0;\vec{i},\vec{k})$ dans les différents cas.

I- 3 Montrer que $\Sigma_{a,R}$ a une équation de la forme : $f(x, y, z) = 0$. (x, y, z) étant les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_0$, avec $f(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2-4a^2(x^2+y^2)$.

I-4 a) - Soit la courbe Γ_λ définie par les relations $\begin{cases}x=\lambda\\(y^2+z^2)^2=8\lambda^2(y^2-z^2).\end{cases}$

où λ est un réel strictement positif donné, et soit γ_λ la projection orthogonale de Γ_λ sur le plan $(0;\vec{j},\vec{k})$. Etudier et tracer γ_λ.

b) Déterminer une équation de la surface de révolution engendrée par rotation de Γ_λ autour de l'axe $(0;\vec{k})$. Montrer que c 'est une surface $\Sigma_{a,R}$ pour des valeurs de a et R à exprimer en fonction de λ.

Dans toute la suite du problème, on supposera $a>R$.

On posera $\alpha = \text{Arcsin}\dfrac{R}{a}$, et éventuellement $b = \sqrt{a^2 - R^2}$

DEUXIEME PARTIE

On note $\mathcal{P}_\alpha$ le plan d'équation : $z = y.\tan\alpha$ dans $\mathcal{R}_o$.

II- 5 a) $\Sigma_{a,R}$ coupe le plan $(0; \vec{j}, \vec{k})$ suivant des cercles C_1 et C_2 (cercles méridiens) dont on donnera des équations.

b) Montrer que le plan $(0; \vec{j}, \vec{k})$ coupe le plan $\mathcal{P}_\alpha$ suivant une droite qui est une tangente commune aux deux cercles C_1 et C_2 en des points notés respectivement A_1 sur C_1 et A_2 sur C_2. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}_o$ de A_1 et A_2.

c) Montrer que $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$ est constitué de deux cercles passant par A_1 et A_2 ; préciser le rayon de ces cercles.

d) Quel est le plan tangent à $\Sigma_{a,R}$ en A_1 et en A_2 ?

TROISIEME PARTIE

On cherche les courbes de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur $\Sigma_{a,R}$ qui coupent les parallèles (cercles de $\Sigma_{a,R}$ d'axe $(0; \vec{k})$) selon un angle β constant. (On rappelle que l' angle de deux courbes en un point M est l'angle que forment en M leurs tangentes).

On définira ces courbes par : $\overrightarrow{OM} = \vec{G}(\theta) = \vec{F}(\theta,\varphi(\theta))$ où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable θ.

III- 6 Déterminer en un même point M de $\Sigma_{a,R}$ des vecteurs tangents d'une part à la courbe définie par $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(\theta,\varphi(\theta))$ et d'autre part au parallèle de $\Sigma_{a,R}$ qui passe par M. (On rappelle qu'un tel parallèle est défini par une équation : φ = constante).

III-7 a) Montrer que φ est solution de l'équation différentielle :

$$\cos^2\beta.\sin^2\alpha\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \sin^2\beta.(1+\sin\alpha.\cos\varphi)^2 \qquad (1)$$

On prendra dorénavant $\beta = \alpha$.

b) Montrer que (1) équivaut alors à : $\cos\alpha\dfrac{d\varphi}{d\theta} = \varepsilon(1+\sin\alpha.\cos\varphi)$ (2)

où ε est une constante égale à 1 ou à -1.

On prendra désormais $\varepsilon = +1$.

III- 8 a) Déterminer la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ définie sur $]-\pi, \pi[$, telle que $\varphi(0) = 0$ et la prolonger en $\theta=\pi$.

b) En déduire un système d'équations paramétriques dans $\mathcal{R}_o$ de la courbe cherchée qu'on notera L.

c) Déterminer la projection orthogonale Λ de L sur le plan $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

d) Montrer que L est une courbe plane simple, dont on donnera la nature.

DEUXIEME PROBLEME

Dans ce problème N désigne un élément de $\mathbb{Z}$ et on étudie l'équation différentielle dite "de Bessel" :

$$x^2y'' + xy' + (x^2-N^2)y = 0 \quad (B_N).$$

PARTIE A

Soit J_N l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $J_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(N\theta - x.\sin\theta)\,d\theta$.

A- 1 Comparer, pour tout x réel, $J_{-N}(x)$ et $J_N(-x)$. Déterminer $J_N(-x)$ en fonction de $J_N(x)$.

A- 2 Montrer que J_N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner les expressions de $J'_N(x)$ et $J''_N(x)$.

A- 3 En utilisant les dérivées des fonctions $\theta \mapsto \sin(N\theta - x\sin\theta)$ et $\theta \mapsto N + x\cos\theta$, montrer que J_N vérifie (B_N) sur $\mathbb{R}$.

A- 4 Calculer $J_0(0)$; $J'_0(0)$; $J''_0(0)$.

A- 5 a) Montrer que, pour $x \neq 0$, et pour tout N de $\mathbb{Z}$, $J_{N-1}(x) + J_{N+1}(x) = \frac{2N}{x} J_N(x)$.

b) Donner, pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$, une relation entre $J'_N(x)$ et $J_{N-1}(x) - J_{N+1}(x)$.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J_1(x) + J'_0(x) = 0$.

PARTIE B

B- 6 Développer J_0 en série entière. En donner le terme général et le rayon de convergence.

B- 7 a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, J_N est également développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

b) Montrer que le terme général de cette série entière peut se mettre sous la forme $\alpha_N(k).x^{N+2k}$, où $k \in \mathbb{N}$. Préciser $\alpha_N(k)$.

PARTIE C

C- 8 Soit un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a<b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,dt$.

C- 9 a) En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} J_0(x)$.

b) Démontrer la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} J_1(x)\,dx$

C-10 Démontrer pour $(\lambda, X) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$2\pi\int_0^X e^{-\lambda x} J_0(x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(\int_0^X e^{-\lambda x - ix\sin\theta}\,dx\right)d\theta + \int_0^{\pi}\left(\int_0^X e^{-\lambda x + ix\sin\theta}\,dx\right)d\theta$$

et en déduire la valeur de : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} J_0(x)\,dx$.